

Optimisation de treillis à membrure supérieure variable sur base de la théorie des indicateurs morphologiques

Ir C. Moureaux
Faculté universitaire des sciences
agronomiques de Gembloux

Dr Ir P. Latteur
ECAM – Bruxelles,
SETESCO - ingénieurs conseils

Cette étude tente d'apporter un complément d'information sur les performances en terme de poids propre des treillis à membrure supérieure variable. Cette théorie, basée sur les indicateurs morphologiques, permet de comparer le volume des structures indépendamment de la charge appliquée, de la portée, du matériau utilisé et du type des sections.

Mots-clefs : optimisation, treillis, indicateurs morphologiques

This study tries to give further information relating the performances, in terms of self weight, of the trusses with variable upper chord. This theory, based on morphological indicators, enables to compare self weight of structures irrespective of the load, the span, the material and the type of sections.

Keywords : optimization, trusses, morphological indicators

1. Introduction

Il est clair que le choix d'une solution structurelle ne peut se baser uniquement sur la quantité de matière mise en œuvre. Beaucoup d'autres paramètres peuvent entrer en compte : des facteurs de main d'œuvre, de disponibilité ou de transport des matériaux, des facteurs socio-économiques, culturels ou politiques, et bien d'autres encore. Quoi qu'il en soit, la comparaison sur base du poids propre (ou du volume, ce qui revient au même), seul paramètre rigoureusement quantifiable avec les déformations, apporte une information utile dans le processus décisionnel qui mène au choix d'une structure et ce point de vue à lui seul justifie à nos yeux la présente étude.

Depuis la publication du livre de Majid [6] [7] et des études de Michell en 1904 [8], de nombreux auteurs ont consacré leurs recherches à l'optimisation du poids propre des treillis. La méthode la plus courante est de définir une *fonction de coût* ou une *fonction objectif* [6] [7] associée à des limitations portant sur des considérations de déplacements aux nœuds, de contraintes dans les barres, ou encore des impositions sur le comportement dynamique de la structure. Cette fonction doit être minimisée et donne lieu, en général, à de fastidieux calculs numériques, dont la solution a le désavantage d'être en relation avec une multitude de paramètres (matériau, portée, types des sections, charge totale, etc.), ce qui a pour effet de nécessiter un nouveau calcul si l'une de ces données est modifiée. Abordant le problème sous une approche différente, Zalewski [15] a comparé le poids de divers types de treillis dont la morphologie est inspirée de l'observation des flux de contraintes dans les poutres droites. Dans leurs études consacrées au prédimensionnement, Samyn et Lateur [11] [12] [13] [14] ont montré que le volume (ou poids propre) d'un treillis de portée L et soumis à une charge extérieure totale F ne dépend essentiellement que de l'élançement géométrique, c'est-à-dire du rapport entre les côtés du rectangle dans lequel il s'inscrit, et qu'il peut être étudié par l'intermédiaire d'un nombre adimensionnel baptisé *indicateur de volume*. Par ailleurs, d'autres études de Lateur et Samyn [1] [2] [3] [4] [5] ont montré que, lorsque le flambement est pris en compte, l'indicateur de volume dépend non seulement de l'élançement géométrique de la structure, mais aussi d'un autre nombre sans dimension, baptisé *indicateur de flambement*. Cet indicateur de flambement est l'image de la sensibilité globale de la structure au flambement.

La présente étude, résumé du travail de fin d'études de C. Moureaux [9], compare le poids propre des treillis à membrure supérieure variable et chargés sur la membrure inférieure en apportant un complément important à la théorie existante. Cette fois, en effet, il est tenu compte de la flexion des éléments de la membrure inférieure qui transmettent les charges réparties aux nœuds du treillis. Ceci se fait par l'intermédiaire d'un nouvel indicateur baptisé *indicateur d'efficacité à la flexion* et qui permet pour la première fois depuis [11] de comparer rigoureusement des treillis dont les nombres de mailles sont différents.

2. Le concept d'indicateur de volume

Nous ne reprenons ici qu'un bref résumé de la théorie, appliqué à un treillis pour lequel on néglige les phénomènes de flambement, dont toutes les barres travaillent à la "contrainte admissible" du matériau et dont les charges sont appliquées aux nœuds. Le lecteur intéressé se reportera à [3] et [4] pour plus d'informations sur la prise en compte des charges aléatoires, du flambement des barres comprimées, de la considération de catégories de barres identiques ne travaillant pas toutes à la contrainte admissible.

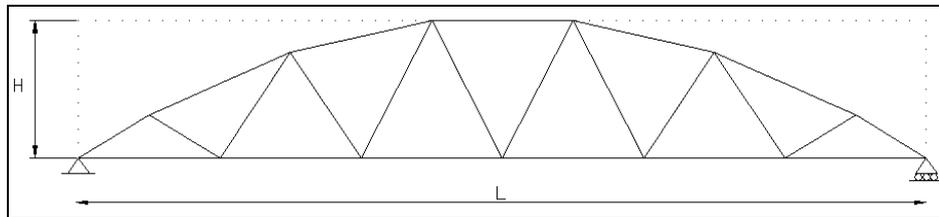


Figure 1 : treillis inscrit dans un rectangle de dimensions L et H . Le rapport L/H est appelé élancement géométrique du treillis.

La théorie part de la constatation que, dans toute barre i de longueur l_i appartenant à un treillis inscrit dans un rectangle de dimensions L et H soumis à une charge extérieure totale F aléatoirement ou uniformément distribuée :

- le rapport adimensionnel l_i/L ne dépend que du rapport L/H ;
- l'effort $k_i.F$ qui sollicite la barre est tel que le terme adimensionnel k_i ne dépend lui aussi que du rapport L/H .

Si le flambement des barres en compression est négligé, chaque barre peut être dimensionnée à la même contrainte admissible du matériau, notée σ . Si tel est le cas, la section Ω_i d'une barre d'indice "i" de longueur l_i soumise à un effort N_i vaut :

$$\Omega_i = \frac{N_i}{\sigma}$$

Le volume V_i de cette même barre vaut alors :

$$V_i = \frac{N_i}{\sigma} l_i$$

Et comme N_i est une fraction $k_i.F$ de la charge totale F , on a :

$$V_i = \frac{FL}{\sigma} \left(k_i \left(\frac{l_i}{L} \right) \right)$$

Comme k_i et l_i/L ne dépendent que de L/H , le terme $W = \sum_i k_i \left(\frac{l_i}{L} \right)$ ne dépend lui aussi que de L/H et le volume total de matière du treillis vaut :

$$V = \sum V_i = \frac{FL}{\sigma} \sum_i k_i \left(\frac{l_i}{L} \right) = \frac{FL}{\sigma} W$$

W est alors l'*indicateur de volume* qui correspond au volume de matière du treillis dont toutes les barres ont été optimisées :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{Fonction} \left(\frac{L}{H} \right)$$

Ce nombre adimensionnel montre bien que, de tous les paramètres qui caractérisent le poids propre du treillis, il n'en reste plus qu'un seul : l'élanement géométrique L/H . A titre d'exemple, la figure 2 donne les valeurs de cet indicateur de volume pour des treillis Warren chargés uniformément sur la membrure inférieure, avec 4 mailles et 6 mailles respectivement. Cette figure met par exemple en évidence que le plus léger des treillis Warren à 6 mailles doit toujours avoir un élanement de 4,1 (c-à-d 4 fois moins haut que large), et ceci quel que soit le matériau, la portée, le type des sections ou la charge.

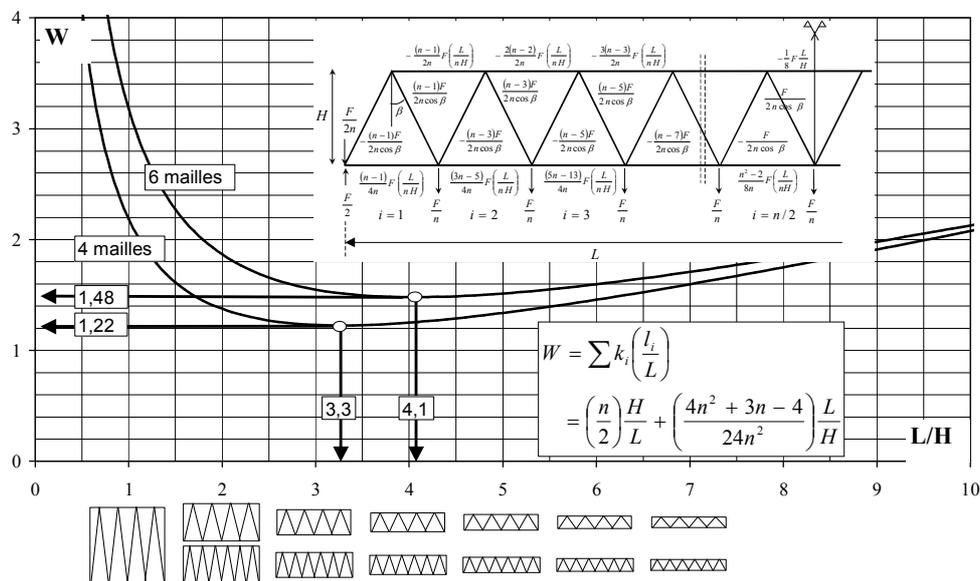
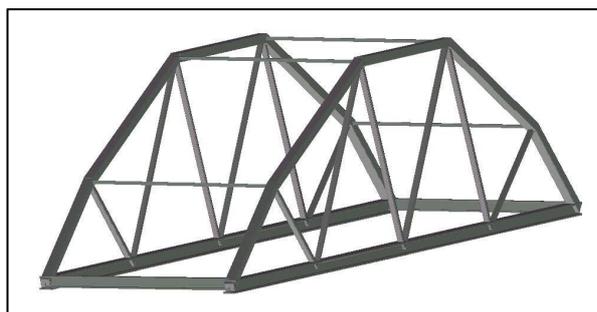


Figure 2 : indicateur de volume W en fonction de L/H (en abscisse) pour un treillis Warren chargé sur sa membrure inférieure (toutes barres optimisées). L'expression de W a été calculée à partir de la valeur analytique des efforts indiqués ci-dessus, pour un treillis possédant un nombre quelconque " n " de mailles.

3. La prise en compte du poids propre des éléments fléchis

Figure 3 :



Dans la pratique la charge sera le plus souvent répartie sur la membrure inférieure (figure 3) et ses éléments seront le siège d'une flexion isostatique ou hyperstatique qui s'ajoute à la traction calculée à partir d'un treillis chargé uniquement à ses nœuds. Ceci est illustré à la figure 4.

Ainsi, la figure 2 pourrait faire penser que le treillis Warren à 4 mailles est toujours plus léger que le treillis Warren à 6 mailles. Un tel raisonnement est faux car la longueur des éléments inférieurs du treillis à 4 mailles (qui vaut $L/4$) est supérieure à celle des éléments inférieurs du treillis à 6 mailles ($L/6$). La quantité de matière nécessaire en flexion est donc plus importante pour le treillis à 4 mailles.

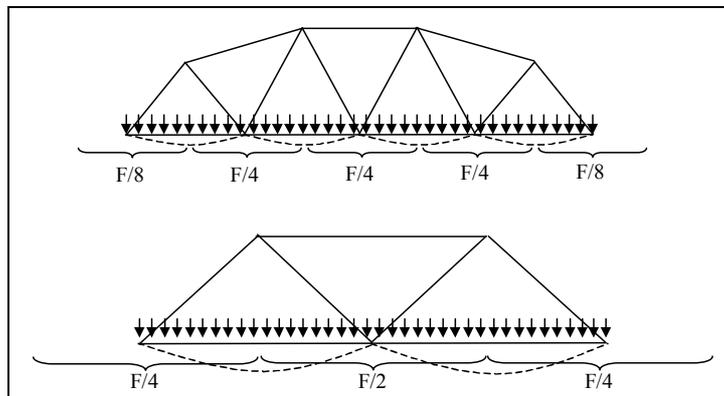


Figure 4 : Dans le treillis supérieur, les éléments fléchis ont une longueur $L/4$ et les nœuds centraux supportent une charge $F/4$. Dans le treillis inférieur, les éléments fléchis ont une longueur $L/2$ et le nœud central supporte une charge $F/2$.

Pour une même portée L et une même charge totale à reprendre, la comparaison du poids propre de deux treillis dont les nombres de mailles sont différents n'est donc rigoureuse que si l'on tient compte du surplus de matière nécessaire aux éléments du tablier pour reprendre la flexion composée.

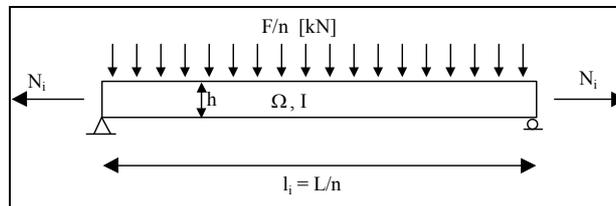


Figure 5 : Modélisation d'un élément de membrure inférieure d'un treillis à n mailles. L'élément est soumis à flexion composée, possède une longueur L/n et est soumis à une charge totale F/n . h est sa hauteur, Ω et I respectivement sa section efficace et son inertie.

Pour calculer le volume total de matière relatif à la membrure inférieure, on procède comme suit :

On fait l'hypothèse que toutes les barres de cette membrure sont identiques, ce qui correspond la plupart du temps à la réalité.

Ensuite, on définit le facteur de forme adimensionnel suivant : $Z = \frac{\Omega h^2}{16I}$

Ce facteur de forme, illustré à la figure 6 pour différentes sections classiques, est une caractéristique fondamentale d'une section.

Chaque élément d'indice i de la membrure inférieure est ainsi modélisé par une poutre de hauteur h de longueur l_i , de section quelconque Ω et d'inertie I , soumise à un effort normal $N_i = k_i.F$ et à un moment de flexion valant $M = FL/(8n^2)$ si l'élément est isostatique. La contrainte maximale dans cet élément est au plus égale à la "contrainte admissible" du matériau, notée σ ,

et vaut :

$$\sigma = \frac{N_i}{\Omega} + \frac{Mh}{2I} = \frac{k_i F}{\Omega} + \frac{FLh}{16In^2}$$

Comme le volume de cet élément vaut $V_i = l_i.\Omega$ et qu'aux éléments de la membrure inférieure correspond un même facteur de forme Z , l'expression ci-dessus peut se ré-écrire :

$$\frac{\sigma V_i}{FL} = k_i \frac{l_i}{L} + Z \frac{L}{h} \frac{1}{n^3} \quad (Z \text{ est le facteur de forme défini ci-dessus et illustré à la figure 6})$$

La membrure inférieure étant composée de n éléments, l'indicateur de volume total du treillis vaut alors :

$$W = \sum k_i \frac{l_i}{L} + \frac{Z}{n} \frac{L/n}{h} \quad \text{ou encore : } \boxed{W = W_T + \frac{\varphi}{n}} \quad \text{avec } \varphi = Z \frac{L/n}{h}$$

Dans cette expression,

- W_T représente l'indicateur de volume "habituel" du treillis, soit celui qui ne tient pas compte de la flexion;
- n est le nombre de mailles du treillis;
- φ est un nombre adimensionnel baptisé *facteur d'efficience à la flexion* et dont les valeurs usuelles sont comprises entre 10 et 30. Il

peut aussi intégrer rigoureusement l'hyperstaticité de la membrure fléchie, le cas échéant.

Pour un nombre de mailles donné, la prise en compte de la flexion revient donc finalement à effectuer une opération d'optimisation sur seulement deux paramètres, à savoir L/H et φ :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{Fonction} \left(\frac{L}{H}, \varphi \right)$$

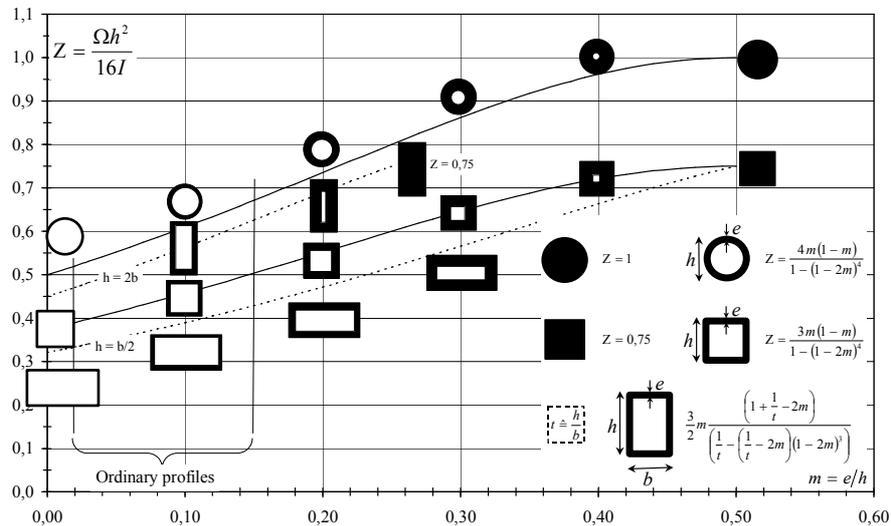


Figure 6 : Valeurs du facteur de forme Z pour les sections classiques.

4. Portée de l'étude

Bien que l'étude originale [10] soit bien plus large, la présente publication concerne l'étude, avec prise en compte de la flexion, des treillis Pratt ou Warren :

- dont la membrure supérieure est droite ou varie selon une loi de type linéaire, parabolique, elliptique, sinusoidale ou circulaire (voir figure 7);
- dont la membrure inférieure reprend une charge totale au plus égale à F , répartie de façon quelconque sur celle-ci, à l'image d'une

charge de foule qui peut se trouver n'importe où sur le tablier. Ce cas sera noté ALEAT;

- comprenant 4 catégories de barres identiques : membrure inférieure, membrure supérieure, diagonales de type 1 (c-à-d dans le sens d'une voûte) ou montants, diagonales de types 2 (c-à-d dans le sens inverse d'une voûte). Ce cas sera noté CAT;
- dont l'angle d'ouverture des mailles est limité pour des raisons de faisabilité entre les angles de 15° et 150° pour les treillis Warren et 15° et 75° pour les treillis Pratt. Ceci est illustré à la figure 8.
- dont l'élançement géométrique au plus égal à 18.

Par ailleurs, on négligera l'influence du flambement sur les éléments comprimés. En effet, il a été montré [1] [2] [3] [4] [5] que la prise en compte du flambement, bien qu'elle augmente sensiblement les valeurs absolues des indicateurs de volume, ne modifie que très peu les valeurs relatives de ceux-ci. En d'autres mots, la prise en compte du flambement ne fait qu'accentuer les différences entre le poids propre de deux structures.

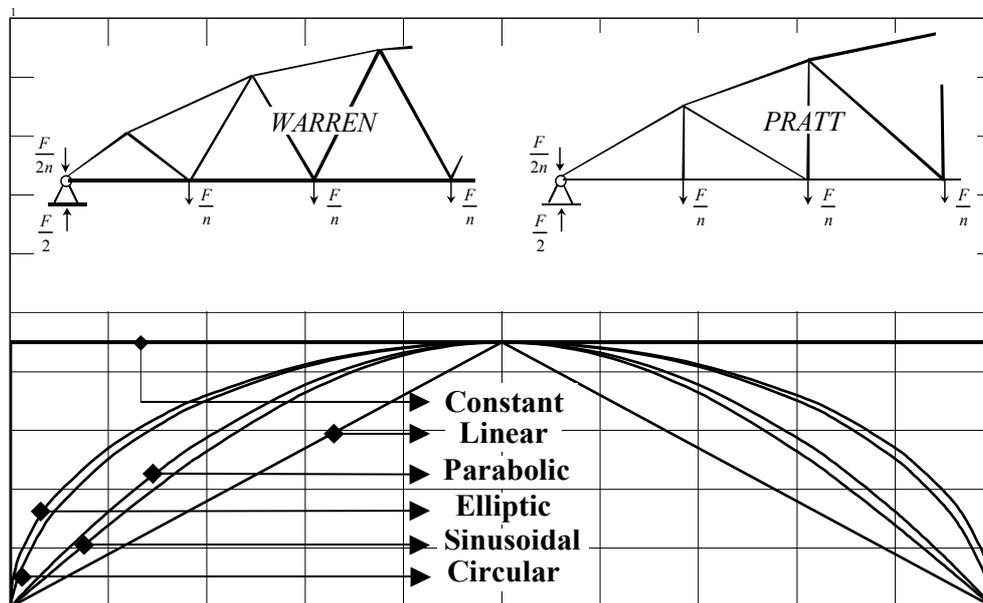


Figure 7 : formes de membrures supérieures faisant l'objet de cette étude.

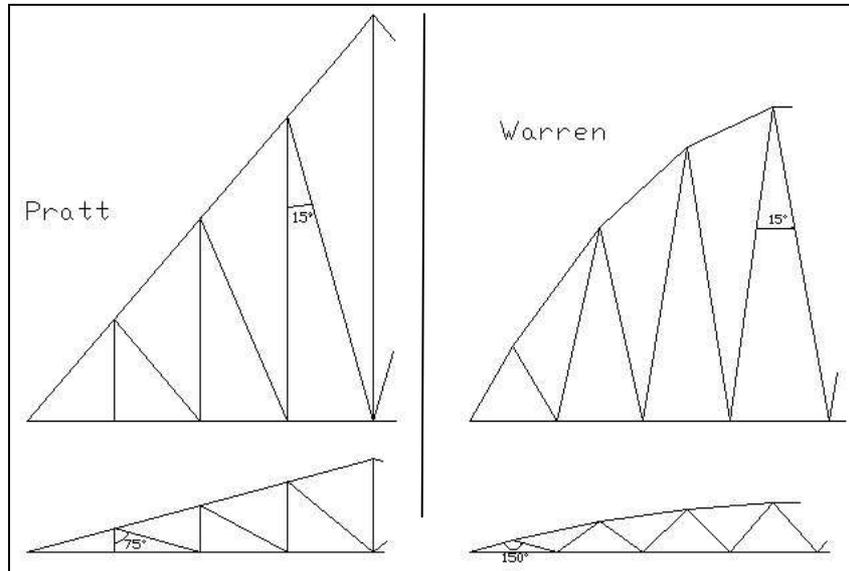


Figure 8 : Angles d'ouverture de mailles minimaux et maximaux.

5. Résultats de l'étude et conclusions

Le premier résultat de cette étude est la mise en évidence que, dans tous les cas de figure, le treillis Warren à membrure supérieure circulaire est toujours le plus léger de tous. Cette constatation remet en question une vieille croyance, probablement faussée par sa validité prouvée pour les arcs, qui attribuait la suprématie à la géométrie parabolique. Ce résultat reste valable si on ne tient pas compte de la flexion ou si la charge est distribuée uniformément plutôt qu'aléatoirement.

La figure 9, qui donne les 6 courbes enveloppes des 6 types de membrures étudiées, suggère toutefois de nuancer ces propos. Ces courbes sont composées chacune de morceaux de courbes relatives à des nombres de mailles différents en Pratt ou Warren et mettent en évidence que la géométrie circulaire est toujours la meilleure mais en compétition serrée avec la parabolique.

La courbe de la figure 9 relative à la géométrie circulaire, et reprise en détails à la figure 10, montre que l'optimum optimum, c'est-à-dire le plus léger des treillis pour $\varphi = 20$, correspond à un treillis Warren circulaire à 20

mailles d'élanement géométrique 5,3 et d'indicateur de volume 3,199. Ce cas se retrouve dans le tableau 1 (caractères encadrés en pointillés).

Le tableau 1 est un récapitulatif des treillis les plus légers : pour chaque valeur de l'indicateur d'efficacité à la flexion ϕ allant de 0 à 50 (ce qui couvre toutes les situations pratiques), il indique la géométrie du treillis optimum optimorum, son nombre de mailles, son élanement géométrique L/H, son type (toujours le Warren circulaire) et la valeur de l'indicateur de volume qui lui correspond.

Les autres résultats principaux de cette étude, mis en évidence par la figure 9, sont les suivants :

- Les géométries sinusoïdales et elliptiques montrent des performances similaires mais sont peu intéressantes car toujours plus lourdes que les géométries paraboliques et circulaires;
- Les géométries linéaires et constantes sont de loin les plus lourdes;
- Le treillis à membrure circulaire ou parabolique permet d'obtenir un gain de matière supérieur à 50 % par rapport au treillis à membrure constante.

6. Références Bibliographiques

- [1] LATTEUR P., SAMYN Ph., "Une méthode globale d'optimisation des treillis", actes du 2^{ième} Congrès Universitaire de Génie Civil, pp. 365-372, Poitiers, mai 1999.
- [2] LATTEUR P., SAMYN Ph., "Optimization of Arches Subjected to Distributed Loads", Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures, Vol. I, pp. B.3.11-B.3.20, Madrid, Septembre 1999.
- [3] LATTEUR P., SAMYN Ph., De Wilde W.P., "Comparaison des treillis classiques de type Warren, Pratt et Howe : optimisation et prédimensionnement sur base d'indicateurs morphologiques", revue française de génie civil, Vol.4, n° 4/2000.
- [4] LATTEUR P., thèse de doctorat, "Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques; application aux structures soumises en partie ou en totalité au flambement". Vrije universiteit Brussel.

- [5] LATTEUR P., SAMYN Ph., DE WILDE W.P., *Optimisation des arcs paraboliques et en chaînette – aide à la conception sur base d'indicateurs morphologiques*, revue française de génie civil, Vol.5, n° 1/2001.
- [6] MAJID K.I., *Optimum Design of Hyperstatic Structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, pp. 561-578, 1972.
- [7] MAJID K.I., *Optimum Design of Structures*, Butterworth & Co. Publishers, London, 1974.
- [8] MICHELL A.G.M., *The limit of Economy of Material in Frame Structures*, Philosophical Magazine, S.6, Vol. 8, n° 47, pp. 589-597, 1904.
- [9] MOUREAUX C., *Optimisation de treillis à membrure variable de type constante, linéaire, parabolique, elliptique, sinusoidale et circulaire sur base de la théorie des indicateurs morphologiques*, Travail de fin d'études, Faculté universitaire des sciences agronomiques de Gembloux, 2003.
- [10] QUINTAS RIPOLL V., *Sobre las formas de minimo volumen de las celosias de seccion constante*, Informes de la construction, vol. 43, n°418, pp. 61-67, Madrid, 1992.
- [11] SAMYN Ph., LATTEUR P., VAN VOOREN J., *Volume of Structures*, Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures, pp. 537-545, Sydney, 1998.
- [12] SAMYN Ph., LATTEUR P., *Displacements of structures*, Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures, pp. 362-367, Sydney, 1998.
- [13] SAMYN Ph., LATTEUR P., *Internally-stayed Trusses : The Search for Minimum Weight*, Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures, Vol. I, pp. B.3.33-B.3.40, Madrid, 1999.
- [14] SAMYN Ph., LATTEUR P., VILQUIN T., *A Search For Efficient Trusses*, Proceedings of the IASS International Symposium : Bridging Large Spans From Antiquity To The Present, Istambul, Mai 2000.
- [15] ZALEWSKI W., KUS St., *Shaping Structures For Least Weight*, Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures, pp. 376-383, Stuttgart, 1992.

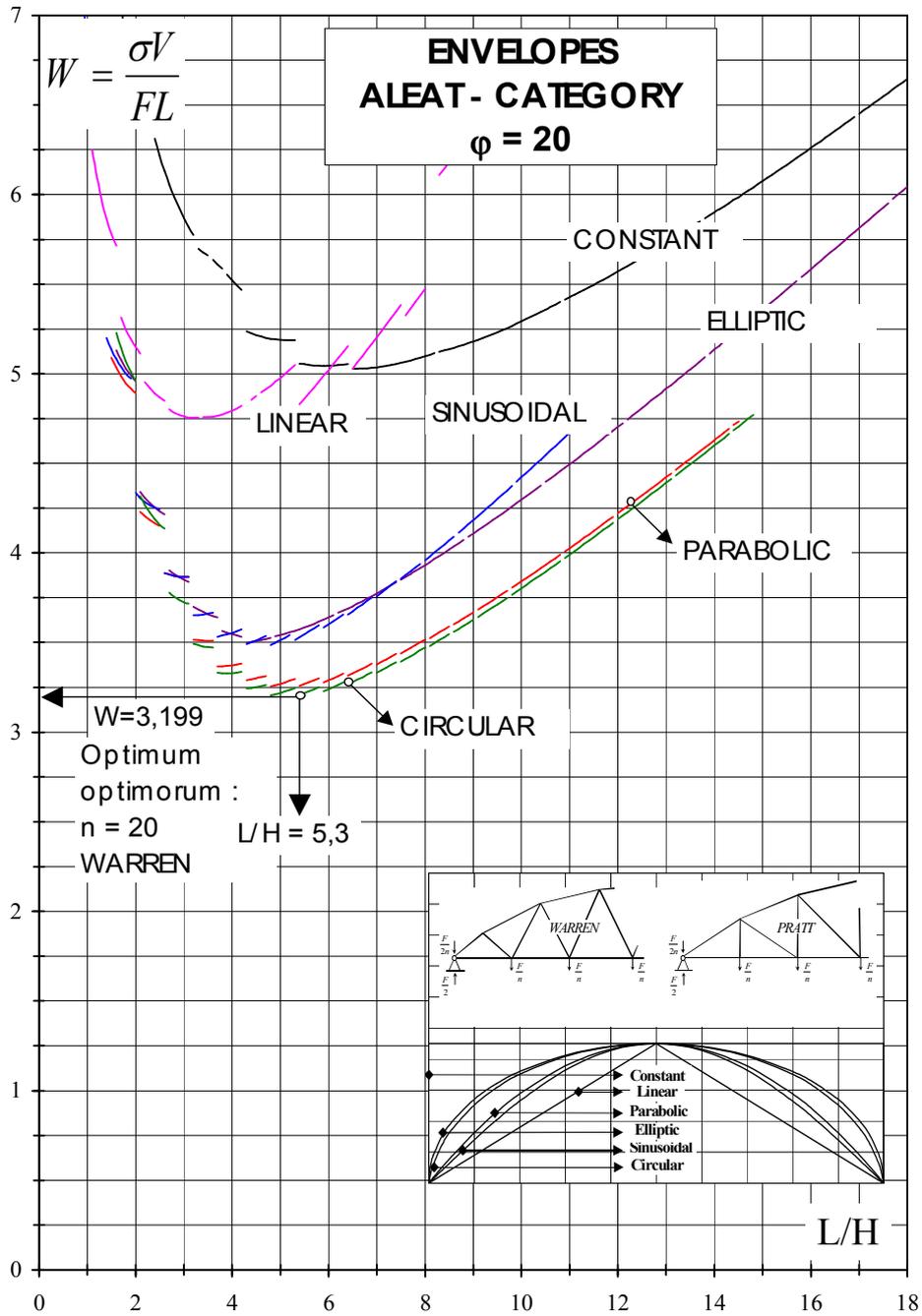


Figure 9 : Enveloppe des courbes W - L/H pour les 6 géométries et pour $\varphi = 20$

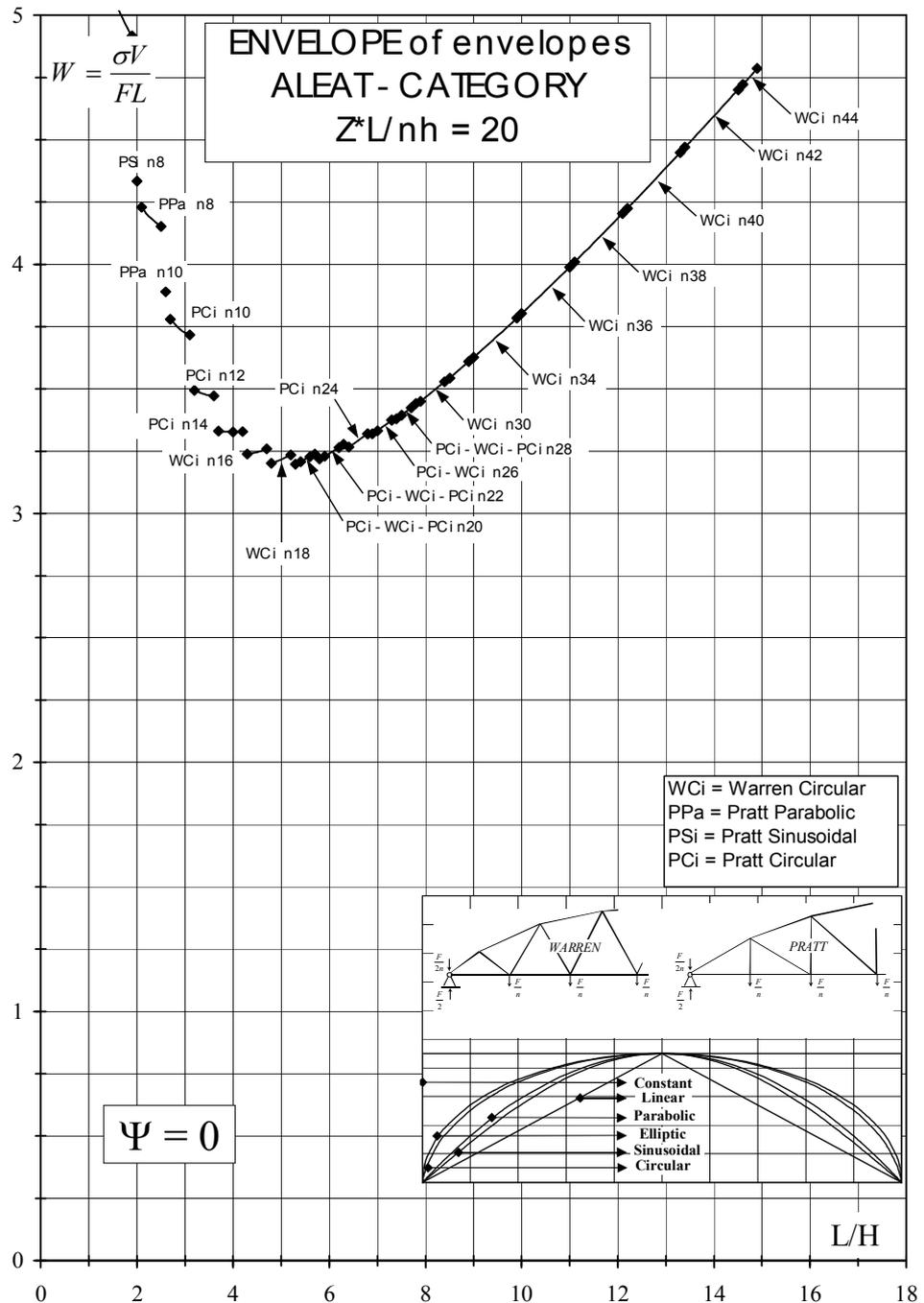


Figure 10 : Enveloppe des enveloppes des courbes $W-L/H$ pour $\varphi = 20$ et pour la géométrie circulaire

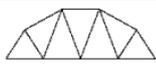
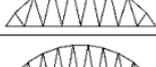
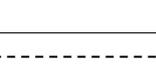
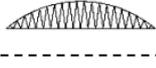
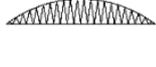
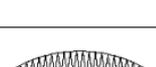
	W	L/H	Typologie	Nb de mailles	
$\varphi = 0$ $\varphi = 1$ $\varphi = 2$	1,271 1,521 1,771	3,0	Warren circulaire	n = 4	
$\varphi = 3$	1,949	3,2	Warren circulaire	n = 6	
$\varphi = 4$	2,084	3,4	Warren circulaire	n = 8	
$\varphi = 5$ $\varphi = 6$	2,199 2,299	3,6	Warren circulaire	n = 10	
$\varphi = 7$ $\varphi = 8$	2,386 2,469	3,8	Warren circulaire	n = 12	
$\varphi = 9$ $\varphi = 10$	2,541 2,613	4,0	Warren circulaire	n = 14	
$\varphi = 11$ $\varphi = 12$ $\varphi = 13$ $\varphi = 14$	2,676 2,739 2,801 2,864	4,3	Warren circulaire	n = 16	
$\varphi = 15$ $\varphi = 16$ $\varphi = 17$ $\varphi = 18$ $\varphi = 19$	2,924 2,979 3,035 3,091 3,146	4,8	Warren circulaire	n = 18	
$\varphi = 20$ $\varphi = 21$ $\varphi = 22$ $\varphi = 23$ $\varphi = 24$	3,199 3,249 3,299 3,349 3,399	5,3	Warren circulaire	n = 20	
$\varphi = 25$ $\varphi = 26$ $\varphi = 27$ $\varphi = 28$ $\varphi = 29$ $\varphi = 30$ $\varphi = 31$ $\varphi = 32$	3,446 3,491 3,537 3,582 3,627 3,673 3,718 3,764	5,8	Warren circulaire	n = 22	
$\varphi = 33$ $\varphi = 34$ $\varphi = 35$	3,809 3,851 3,892	6,4	Warren circulaire	n = 24	
$\varphi = 36$ $\varphi = 37$ $\varphi = 38$ $\varphi = 39$ $\varphi = 40$ $\varphi = 41$ $\varphi = 42$	3,934 3,972 4,011 4,049 4,088 4,126 4,165	6,9	Warren circulaire	n = 26	
$\varphi = 43$ $\varphi = 44$ $\varphi = 45$ $\varphi = 46$ $\varphi = 47$ $\varphi = 48$ $\varphi = 49$	4,202 4,237 4,273 4,309 4,345 4,380 4,416	7,4	Warren circulaire	n = 28	
$\varphi = 50$	4,450	7,9	Warren circulaire	n = 30	

Tableau 1 : OPTIMA OPTIMORUM pour des valeurs du facteur d'efficience à la flexion φ variant de 0 à 50.